18/02/2015

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ 47

Εστω $e=(e_1, e_2, \dots, e_n)$ διατεταγμένη βάση του δ.χ $V$ επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to V$ γραμμική. Ορίζουμε τον πίνακα $[f]_e^e \in \mathbb{F}^{n \times n}$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ 48

Για $f: V \to V$ γραμμική ορίζουμε $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ κτλ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 49

Εστω $e=(e_1, \dots, e_n)$ διατεταγμένη βάση του $V$ επί του $\mathbb{F}$. $f: V \to V$ γραμμική $A = [f]_e^e$ και $\phi(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_d x^d \in \mathbb{F}[x]$. Θέτουμε $\phi(A) = b_0 I_n + b_1 A + b_2 A^2 + \dots + b_d A^d \in \mathbb{F}^{n \times n}$ και $\phi(f) = b_0 id_V + b_1 f + b_2 f^2 + \dots + b_d f^d$ (όπου $f^2 = f \circ f$ κλπ)

(iv) (Η $\phi(f): V \to V$ είναι γραμμική) Τότε $[\phi(f)]_e^e = \phi(A)$

Απόδειξη: Εύκολη επαλήθευση, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο d και στα ...

Γρ. Αλγ. Ι $[f \circ f]_e^e = ([f]_e^e)^2$

$[g+h]_e^e = [g]_e^e + [h]_e^e$

$[\lambda f]_e^e = \lambda([f]_e^e)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 50

Έστω $e = (e_1, e_2, e_3)$ διατεταγμένη βάση του $V$ επί του $\mathbb{R}$, $\phi(x) = 1 + 5x^2 + 8x^3$ και $f: V \to V$ γραμμική. Θέτουμε $A = [f]_e^e$. Τότε $[id_V + 5(f \circ f) + 8(f \circ f \circ f)]_e^e$
$= I_3 + 5A^2 + 8A^3$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 51

Μπορούμε να ορίσουμε πίνακες, με στοιχεία πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$. Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και να προσθέσουμε τέτοιους πίνακες, όταν αυτό έχει νόημα. Οι ιδιότητες της Γρ. Αλγ. Ι, όπως π.χ προσεταιριστικότητα, επιμεριστικότητα εξακολουθούν να ισχύουν. Επιπλέον, αν $A$ είναι τετραγωνικός $\nu \times \nu$ πίνακας με στοιχεία πολυώνυμα, ορίζεται η ορίζουσα $\det A \in \mathbb{F}[x]$ όπως στην Γρ. Αλγ. Ι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 52

Έστω $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ (με στοιχεία στο $\mathbb{R}$). Τότε $A+B \begin{bmatrix} 3+x & 5 \\ 2 & x+x^2 \end{bmatrix}$

$\det A = x \cdot x^2 - 0 \cdot 0 = x^3$, $\det B = 3x - 10$

ΟΡΙΣΜΟΣ 53

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $x$ μεταβλητή (πολυωνυμική). Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$\chi_A(x) = \det(A - x I_\nu) \in \mathbb{F}[x]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 54

Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, τότε $\chi_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} = x^2 - 7x - 2$

Αν $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, τότε $\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 3 \\ 0 & 1-x & 4 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} =$

$(2-x)(1-x)(5-x)$

★ Παρατηρούμε στα παραδείγματα (και ισχύει γενικά) ότι $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, $\deg \chi_A(x) = \nu$

ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ - ΙΔΙΟΧΩΡΟΙ - ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΟΡΙΣΜΟΣ 5.5

α) Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $\lambda \in \mathbb{F}$. Το $\lambda$ λέγεται ιδιοτιμή του $A$ αν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x)$ του $A$ (ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ από Γρ.Αλγ. I, $\lambda$ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_\nu) = 0_{\mathbb{F}} \Leftrightarrow$ ο πίνακας $A - \lambda I_\nu$ δεν αντιστρέφεται $\Leftrightarrow$ υπάρχει μη μηδενικό $w \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$ ώστε $(A - \lambda I_\nu)w = \mathbb{0}_{\nu\times 1}$

b) Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή του $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο υπόχωρος $V_A(\lambda) = \{ w \in \mathbb{F}^{\nu\times 1}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3

Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ και $x$ πολυωνυμική μεταβλητή. Ορίζουμε το ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\chi_A(x) = \det(A - xI_\nu) \in \mathbb{F}[x]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6

α) Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Τότε $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{bmatrix} = (1-x)(2-x)$

Άρα ο $A$ έχει 2 ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Έχουμε $V_A(\lambda_1) = V_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : (A - 1I_2)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Έχουμε $A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 0a + 0b = 0 \\ 0a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$

Επομένως $A - I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Επομένως, $V_A(1) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

Έχουμε $V_A(\lambda_2) = V_A(2) : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Άρα $(A - 2I_2)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{ a = 0$. Άρα $V_A(\lambda_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

(6) b) Έστω $A=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2\times2}$. Έχουμε $\chi_A(x)=\det(A-xI_2)=\begin{vmatrix}-x&-1\\1&x\end{vmatrix}=$

$=x^2+1$. Άρα ο A δεν έχει ιδιοτιμές επί του σώματος $\mathbb{R}$.

(c) $B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$

Έχουμε όπως στο b) $\chi_B(x)=x^2+1=(x+i)(x-i)$. Έχουμε 2 ιδιοτιμές του B (στο $\mathbb{C}$): $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Υπολογίζουμε $V_B(i)=\left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2} : (A-iI_2)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$. Έχουμε $(A-iI_2)\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-i&-1\\1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ia-b=0\\ 1a+ib=0\end{cases}$

Επαυξημένος πίνακας $\left[\begin{array}{cc|c}-i&-1&0\\1&i&0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&i&0\\-i&-1&0\end{array}\right]\sim$

$\left[\begin{array}{cc|c}1&i&0\\0&0&0\end{array}\right]$ Άρα το σύστημα γίνεται $ai+b=0$

Άρα $V_B(\lambda_1)=V_B(i)=\left\{\begin{bmatrix}i-b\\b\end{bmatrix}, b\in\mathbb{C}\right\}$ (Ομοίως υπολογίζουμε και το $V_B(\lambda_1)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1

Έστω $0_V\neq V$ δ.χ. πεπερασμένης διάστασης επί του σώματος $\mathbb{F}$, $f:V\to V$ γραμμική και $e=(e_1,\dots,e_n)$ διατ. βάση του V

(i) Ορίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x)\in\mathbb{F}[x]$ ως εξής $\chi_f(x)=\chi_{[f]_e^e}(x)$ (Θα δούμε ο ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογ της διατ. βάσης e)

(ii) Έστω $\lambda\in\mathbb{F}$. Το λ λέγεται ΙΔΙΟΤΙΜΗ της f αν είναι ρίζα του $\chi_f(x)$ (ισοδύναμα ρίζα του $\chi_{[f]_e^e}(x)$)

(iii) Αν λ ιδιοτιμή της f, ορίζουμε τον ΙΔΙΟΧΩΡΟ της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, ως εξής $V_f(\lambda)=\ker(f-\lambda\, id_V)$ που είναι υπόχωρος του V)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Δείχνουμε ότι αν $e'=(e_1',\dots,e_n')$ επίσης βάση του V, ...

Επίσης βάση του $V$, τότε $\chi_{[f]_e^e}(x) = \chi_{[f]_{e'}^{e'}}(x)$, δηλαδή $\det(A - xI_v) = \det(B - xI_v)$ όπου $A = [f]_e^e$, $B = [f]_{e'}^{e'}$ (4.1)

Απόδειξη: $A = [f]_e^e = [id_v]_{e'}^{e}\,[f]_{e'}^{e'}\,[id_v]_{e}^{e'} = P^{-1}BP$

Επομένως $\det(A - xI_v) = \det(P^{-1}BP - xP^{-1}I_vP) =$ όπου $P = [id_v]_e^{e'}$

$\det(P^{-1}(B - xI_v)P) = (\det P^{-1})\det(B - xI_v)(\det P) =$

$= (\det B)^{-1}\det P \det(B - xI_v) = \det(B - xI_v)$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Δείξαμε επίσης ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58

Έστω $\mathbb{R}_{<1}[z]$ ο $\mathbb{R}$ δ.χ. των πολυωνύμων βαθμού $<1$ στην μεταβλητή $z$ δηλ. $\mathbb{R}_{<1}[z] = \{a + bz : a, b \in \mathbb{R}\}$. Έστω $f : \mathbb{R}_{<1}[z] \to \mathbb{R}_{<1}[z]$ η γραμ. απεικόνιση με $f(a + bz) = a + 2bz$. Θα υπολογίσουμε τη διατεταγμένη βάση $e(1, z)$ του $\mathbb{R}_{<1}(z)$. Θέτουμε $A = [f]_e^e \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ 1: (όπως στη γραμμική 1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ 2: $\chi_f(x) = \det(A - xI_2) = \det\begin{bmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{bmatrix} = (x-1)(x-2)$

επομένως η $f$ έχει ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ 3: Ιδιοχώρων που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές. Υπολογισμός

$V_f(1) = \ker(f - id_{\mathbb{R}_{<1}[z]})$ (όπως στην ΓΡ Ι)

$V_f(2) = \ker(f - 2id_{\mathbb{R}_{<1}[z]})$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\to$ ιδιοτιμές $\to$ ιδιοχώρους

ΟΡΙΣΜΟΣ 59

(i) Έστω $A \in \mathbb{F}^{v\times v}$. Το $w \in \mathbb{F}^{v\times 1}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του $A$, αν $w \neq 0$ και υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda$ του $A$ ώστε $w \in V_A(\lambda)$ (ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ $w \neq 0$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ με $Aw = \lambda w$). Με άλλα λόγια το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του $A$ είναι ίσο με (ένωση όλων ιδιοχώρων του $A$)

(ii) Έστω $V \neq \{0_V\}$ πεπερ. διάστασης διαν. χώροι επί του $\mathbb{F}$ και $f: V \to V$ γραμμική. Το $w \in V$ με $w \neq 0$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα της $f$ αν υπάρχει ιδιοτιμή α8) της $f$ ώστε $f(\omega)=\lambda\omega$ και υπάρχει ιδιοτιμή $x \in \mathbb{F}$ με $\omega \in V_f(\lambda)$